UL — ANNÉE ACADÉMIQUE 2022-2023

Analyse Numérique Matricielle — *L 3*

FICHE DE T D N° 1

Exercice 1. *Soit A une matrice, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*

1. *Rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une factorisation LU de la matrice A et préciser les definitions de L et U.*
2. *On suppose L et U construites (i.e. on dispose de tous les coefficients $l_{i,j}$ et $u_{i,j}$ de L et U). Ecrire l'algorithme de résolution de $Ax = b$, avec $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné.*
3. *Soit la matrice A suivante :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ .-1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Construire à la main les matrices L et U de la factorisation LU.

Exercice 2. *Calculer, lorsqu'il est possible, la factorisation LU des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on modifier l'algorithme de factorisation pour pouvoir toujours aboutir à une factorisation LU lorsque la matrice est inversible ?

Exercice 3. *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$, dont les éléments vérifient*

1. *$a_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $i = n$,*
2. *$a_{ij} = -1$ si $i < j$,*
3. *$a_{ij} = 0$ sinon.*

Calculer la factorisation LU de A.

Exercice 4. *Résoudre par la méthode de Cholesky le système*

$$\begin{cases} 9x + 6y + 3z &= 39 \\ 6x + 20y + 6z &= 86 \\ 3x + 6y + 3z &= 27 \end{cases}$$

Exercice 5. *Résoudre via la décomposition de Cholesky le système linéaire $Ax = b$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *Soit le système linéaire*

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. *Approcher la solution avec la méthode de JACOBI avec* 3 *itérations à partir de* $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.
2. *Approcher la solution avec la méthode de GAUSS-SEIDEL avec* 3 *itérations à partir de* $x^{(0)} = (2, 2, 2)$.
3. *Résoudre les systèmes linéaires par laméthode d'élimination de GAUSS.*
4. *Factoriser la matrice A (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre les systèmes linéaires.*

Exercice 7. *Considérons le système linéaire* $Ax = b$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec α, β, γ *et* δ *des paramètres réels. Donner des conditions suffisantes sur les coefficients pour avoir*

1. *convergence de la méthode de JACOBI*
2. *convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL.*

Exercice 8. *On considère les deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chercher les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel associées aux matrices A *et* B *et comparer les rayons spectraux.*

Exercice 9. *Calculer la solution des systèmes suivants* $AX = B_1$ *et* $AX = B_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.569 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0.216999 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

et calculer $cond_2(A)$